

Le calcul électronique

1) Préliminaires : les systèmes de numérotation

a) Le système décimal

Admettons que vous soyez né en l'année 1989 après J. -Ch.

Ce nombre signifie que, depuis la naissance du Christ jusqu'à la vôtre, on a décompté le commencement de 1989 années.

On peut décomposer cette durée en :

$$\begin{aligned} 1 \text{ millénaire} &= 1 \times 1000 = 1 \times 10^3 \text{ années} \\ 9 \text{ siècles} &= 9 \times 100 = 9 \times 10^2 \text{ années} \\ 8 \text{ décennies} &= 8 \times 10 = 8 \times 10^1 \text{ années} \\ 9 \text{ années} &= 9 \times 1 = 9 \times 10^0 \text{ années} \end{aligned}$$

$$\text{somme : } 1989 = 1 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 9 \times 10^0$$

Le nombre qui indique l'année de votre naissance correspond donc aux coefficients des puissances successives de 10 : 10^0 , 10^1 , 10^2 , 10^3 : l'année de votre naissance est indiquée en le système de numérotation à base 10 ou système décimal. Ce système comporte 9 chiffres allant de 0 à 9.

Historiquement parlant, le système décimal a évolué chez les civilisations mongolienne, indo-européenne et sémite. Il dérive certainement du fait que l'homme se sert de ses 10 doigts pour compter.

b) Systèmes à base quelconque et systèmes usuels

Tout entier naturel strictement supérieur à 1 peut servir de base à un système de numérotation. Quelle que soit la base p du système de numérotation, le système comporte p chiffres, allant de 0 à $p-1$.

Systèmes anciens

Les Celtes, les Maya et les Aztèques se servaient d'un système à base 20, dérivé du nombre total des doigts des 2 mains et des 2 pieds.

Les Babyloniens et les Sumériens avaient un système de numérotation à base 60, dont l'origine est obscure, mais probablement en rapport avec le fait que l'année comporte environ 360 jours et que la circonférence du cercle comprend environ 6 fois le rayon. Mathématiquement parlant, la base 60 est intéressante, car elle comporte un très grand nombre de diviseurs. Ce système hexadécimal fut repris par les astronomes grecs et arabes. C'est la raison pour laquelle l'influence de ce système se remarque encore de nos jours dans la mesure du temps (60 secondes par minute et 60 minutes par heure) et dans la mesure des angles (360° pour l'angle $2\pi r$).

Systèmes importants actuels

Les méthodes de calcul électroniques utilisent le système à base 2 appelé encore système binaire. Le système binaire ne comporte que 2 chiffres : 0 et 1. Ils sont appelés « bits », de l'anglais « binary digits ». Ceci correspond particulièrement bien à la logique des circuits électroniques :

« 1 » signifie qu'un certain point du circuit est sous tension

« 0 » signifie que ce point du circuit n'est pas sous tension

Remarquons qu'en informatique le système octal (à base 8) joue encore un certain rôle (1 byte = 8 bits). En effet, la conversion entre le système binaire et le système octal est particulièrement aisée.

c) Le système de numérotation binaire

Le système est donc construit sur les puissances à base 2 et comporte les chiffres 0 et 1.

Pour convertir un nombre décimal en un nombre binaire, il suffit d'appliquer la table des puissances de 2 :

| | | |
|------------|-------------|------------------|
| $2^0 = 1$ | $2^5 = 32$ | $2^{10} = 1024$ |
| $2^1 = 2$ | $2^6 = 64$ | $2^{11} = 2048$ |
| $2^2 = 4$ | $2^7 = 128$ | $2^{12} = 4096$ |
| $2^3 = 8$ | $2^8 = 256$ | $2^{13} = 8192$ |
| $2^4 = 16$ | $2^9 = 512$ | $2^{14} = 16384$ |

Convertissons le nombre décimal 1989 de l'année de votre naissance en nombre binaire :

La plus haute puissance de 2 renfermée dans le nombre décimal 1989 vaut $1024 = 2^{10}$. Calculons le reste en retranchant 1024 de 1989 ($1989 - 1024 = 965$) et procédons de même pour ce reste.

| | | |
|----------------------------------|-------|---------------------------------------|
| $1989 = 1 \times 2^{10} (=1024)$ | + 965 | |
| $965 = 1 \times 2^9 (= 512)$ | + 453 | |
| $453 = 1 \times 2^8 (= 256)$ | + 197 | |
| $197 = 1 \times 2^7 (=128)$ | + 69 | |
| $69 = 1 \times 2^6 (= 64)$ | + 5 | 5 est inférieur à $2^5 = 32$, d'où : |
| $5 = 0 \times 2^5 (= 0)$ | + 5 | 5 est inférieur à $2^4 = 16$, d'où : |
| $5 = 0 \times 2^4 (= 0)$ | + 5 | 5 est inférieur à $2^3 = 8$, d'où : |
| $5 = 0 \times 2^3 (= 0)$ | + 5 | |
| $5 = 1 \times 2^2 (= 4)$ | + 1 | 1 est inférieur à $2^1 = 2$, d'où : |
| $1 = 0 \times 2^1 (= 0)$ | + 1 | |
| $1 = 1 \times 2^0 (=1)$ | + 0 | |

En système binaire, l'année mémorable de votre naissance (1989) s'écrit donc :

$$1 \times 2^{10} + 1 \times 2^9 + 1 \times 2^8 + 1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$

11111000101

Remarque : la conversion d'un nombre décimal en nombre binaire peut encore se faire par divisions successives par 2 et calcul du reste ; les restes donnent alors le nombre binaire *de la droite vers la gauche* :

| | |
|--------------------------|-----------------------|
| $1989 : 2 = 994$ reste 1 | $31 : 2 = 15$ reste 1 |
| $994 : 2 = 497$ reste 0 | $15 : 2 = 7$ reste 1 |
| $497 : 2 = 248$ reste 1 | $7 : 2 = 3$ reste 1 |
| $248 : 2 = 124$ reste 0 | $3 : 2 = 1$ reste 1 |
| $124 : 2 = 62$ reste 0 | $1 : 2 = 0$ reste 1 |
| $62 : 2 = 31$ reste 0 | |

Etablissons le tableau de l'expression binaire des nombres décimaux de 0 à 31 :

| | | | | | |
|----|---|------|----|---|-------|
| 0 | $0 \cdot 2^0$ | 0 | 16 | $1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$ | 10000 |
| 1 | $1 \cdot 2^0$ | 1 | 17 | $1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$ | 10001 |
| 2 | $1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$ | 10 | 18 | $1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$ | 10010 |
| 3 | $1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$ | 11 | 19 | $1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$ | 10011 |
| 4 | $1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$ | 100 | 20 | $1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$ | 10100 |
| 5 | $1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$ | 101 | 21 | $1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$ | 10101 |
| 6 | $1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$ | 110 | 22 | $1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$ | 10110 |
| 7 | $1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$ | 111 | 23 | $1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$ | 10111 |
| 8 | $1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$ | 1000 | 24 | $1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$ | 11000 |
| 9 | $1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$ | 1001 | 25 | $1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$ | 11001 |
| 10 | $1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$ | 1010 | 26 | $1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$ | 11010 |
| 11 | $1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$ | 1011 | 27 | $1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$ | 11011 |
| 12 | $1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$ | 1100 | 28 | $1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$ | 11100 |
| 13 | $1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$ | 1101 | 29 | $1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$ | 11101 |
| 14 | $1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$ | 1110 | 30 | $1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$ | 11110 |
| 15 | $1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$ | 1111 | 31 | $1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$ | 11111 |

Nous constatons que les valeurs décimales 2, 4, 8, 16, ... s'expriment en binaire par des « nombres ronds » : 10, 100, 1000, 10000, ...

2) étude d'un exemple : Le circuit électronique de l'addition

En considérant le tableau précédent dans lequel chaque nombre se déduit du précédent par l'addition de « 1 », nous dégagons les règles de l'addition dans le système binaire. Désignons par B et B' les 2 bits à additionner :

| | | | | |
|---------|----------|----------|----------|----------|
| B | 0 + | 1 + | 0 + | 1 + |
| B' | <u>0</u> | <u>0</u> | <u>1</u> | <u>1</u> |
| Somme : | 0 | 1 | 1 | 10 |
| | C | C | C | RC |

Désignons par C le chiffre binaire qui figure dans la colonne des bits additionnées et par R le report. On appelle report la valeur qu'il faut ajouter à la colonne de la puissance de 2 immédiatement supérieure.

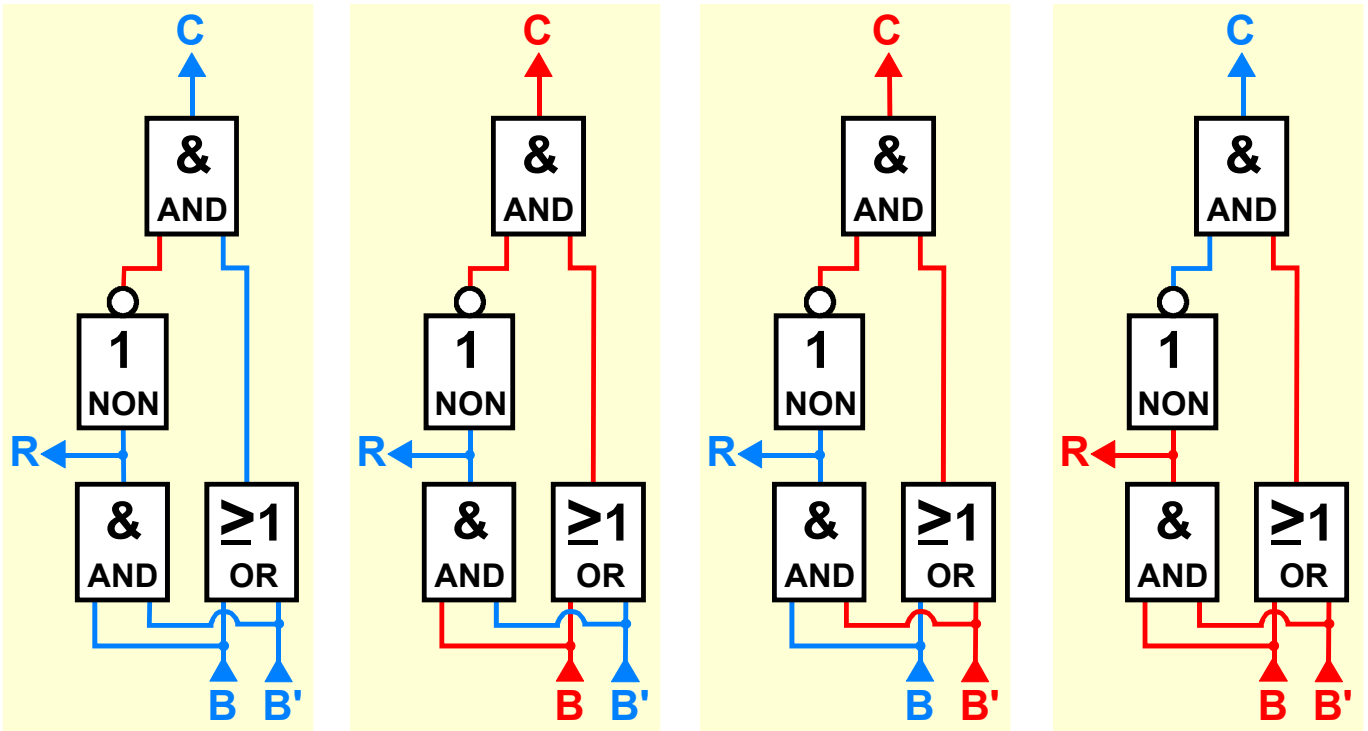
Les 3 premiers calculs correspondent au circuit logique « OR », avec B et B' aux entrées et C à la sortie.

Pour le 4^e calcul, le report R correspond à la fonction « AND » et la valeur C correspond à la fonction « NAND ».

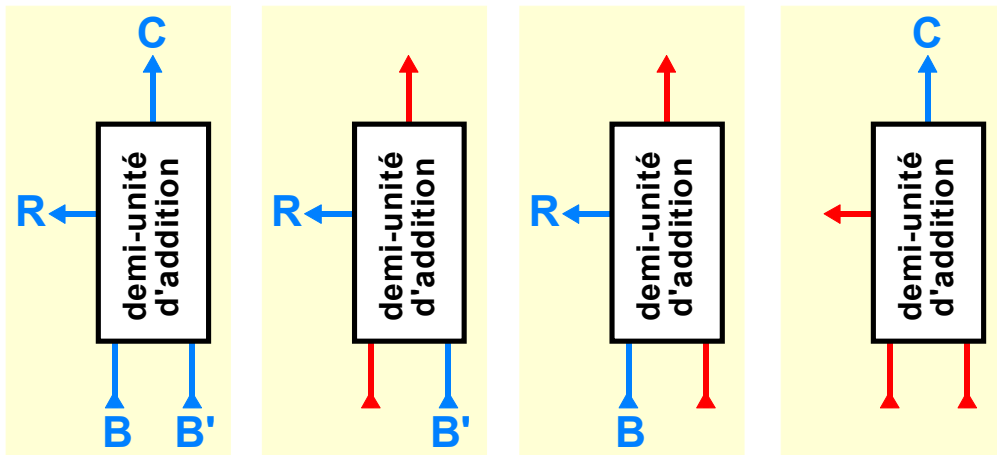
Les 4 calculs sont traduits par le tableau de vérité ci-contre :

| entrées | | sorties | |
|---------|----|---------|---|
| B | B' | R | C |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

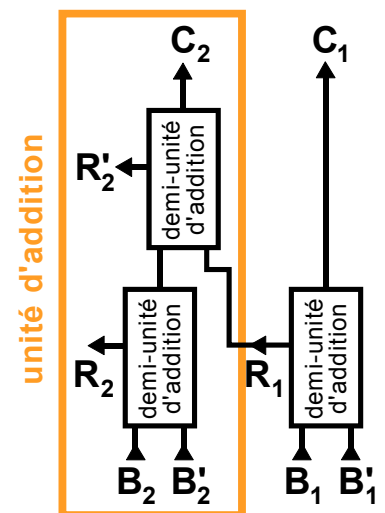
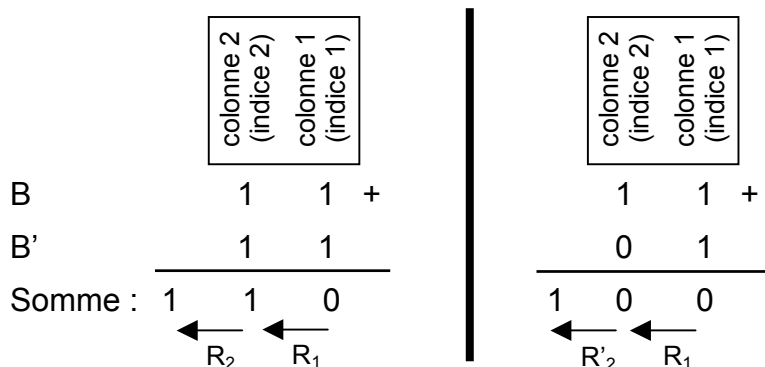
Toutes ces règles sont traduites par le circuit logique suivant : (les 4 états possibles représentés de gauche à droite correspondent aux 4 cas représentés dans le tableau de vérité des 4 calculs de la page précédente)



Schématisons l'ensemble de ce circuit logique par le symbole représenté ci-dessous : c'est la demi-unité d'addition. (les 4 états possibles sont représentés de gauche à droite)



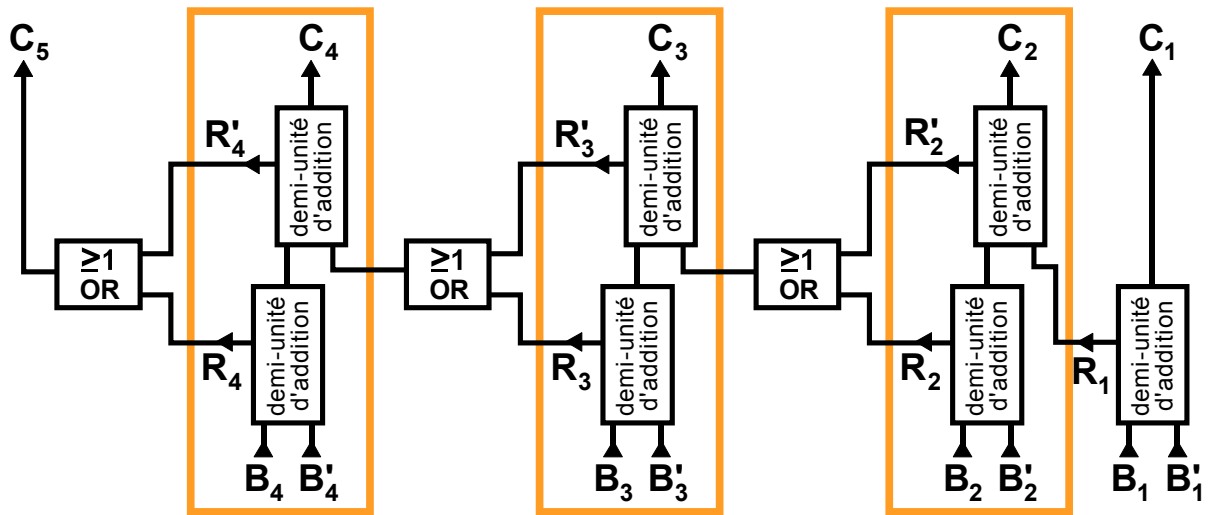
Dans le cas d'une addition de 2 nombres binaires comportant plus d'une colonne, il faut ajouter au résultat de chaque colonne (sauf pour la dernière) le report R de la colonne précédente.



Cette opération nécessite une deuxième demi-unité d'addition.

L'unité d'addition complète se présente donc ainsi (l'encadré orange) :

Un circuit d'addition de 2 nombres à 4 bits se présente donc ainsi :



Ce circuit permet de réaliser des additions jusqu'à la somme de 11111 (valeur binaire) ou 31 (valeur décimale). Pour étendre le calcul à des valeurs plus élevées, il suffit d'ajouter pour chaque bit supplémentaire une unité d'addition.